合肥市2014年高三第三次教学质量检测
数学试题(理)参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	*B*	*A*	*D*	*B*	*B*	*A*	*A*	*C*	*B*	*D*

二、填空题：本大题共5小题，每小题5分，共25分，把答案填在答题卡的相应位置

11. $\frac{3}{5}$　　12. $\frac{3}{4}$或4　　13. 7　　14. 240　　15. $3\sqrt{3}$

三、解答题

16. 解：(Ⅰ) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow c^2-2c+1=0\Rightarrow c=1$

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　………6分

(Ⅱ) $\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-C)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$,

又 $A=\frac{2\pi}{3}-C>\frac{\pi}{2},\therefore 0<C<\frac{\pi}{6}$，所以 $0<\tan C<\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow\frac{1}{\tan C}>\sqrt{3}\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}=2$，所以 $\frac{a}{c}$ 的取值范围 $(2,+\infty)$.　　………12分

17. 解：(Ⅰ) 证明：

$\because E,F$ 分别为 $P'C,P'D$ 的中点，G 是 BC 中点，

$\therefore EF \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}CD$，同理 $GE \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}P'B$

又 $CD \underline{\underline{\parallel}} AB$，$\therefore EF \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$.

$EG \cap EF = E, P'B \cap AB = B, \therefore$ 平面 $EFG \parallel$ 平面 ABP'. ………6 分

（Ⅱ）（综合法）取 AD 中点 T，连 GT. FT. $\therefore GT \parallel CD$. 又 $\because EF \parallel CD$.

$\therefore EF \parallel GT$. 即 E、F、T、G 共面. $\because CD \perp$ 平面 $P'AD$.

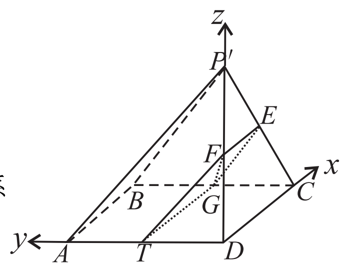
$\therefore EF \perp$ 平面 $P'AD$. $\therefore \angle TFD$ 是二面角 $G-EF-D$ 的平面角；易知 $\angle TFD = 45°$.

$\therefore$ 二面角 $G-EF-D$ 的平面角为 $45°$.

（向量法）由已知底面 $ABCD$ 是正方形，

又 $\because P'D \perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore DA, DC, DP'$ 两两垂直，建立如图空间直角坐标系 $D-xyz$，则



$P'(0,0,2), C(2,0,0), G(2,1,0), E(1,0,1), F(0,0,1), A(0,2,0)$. $\overrightarrow{AP'} = (0,-2,2), \overrightarrow{EF} = (-1,0,0), \overrightarrow{EG} = (1,1,-1)$，

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}. \quad 取 \vec{n} = (0,1,1)，$$

易知向量 $\overrightarrow{DA}$ 是平面 $P'CD$ 的一个法向量，$\overrightarrow{DA} = (0,2,0)$，

$\therefore \cos\langle \overrightarrow{DA}, \vec{n} \rangle = \dfrac{\overrightarrow{DA} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ 二面角 $G-EF-D$ 的平面角为 $45°$.

………12 分

18. 解：（Ⅰ）$f'(x) = \dfrac{a}{x} + x - 1$，由 $f'(2) = 0$ 得 $a = -2$，

此时 $f'(x)=\frac{-2}{x}+x-1=\frac{x^2-x-2}{x}$ 可知 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减，$(2,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(2)=-2\ln 2$. ………6 分

（Ⅱ）由 $f(x)-ax=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-x-ax>0$ 在 $(e,+\infty)$ 内恒成立，

又因为 $x\in(e,+\infty)$，所以 $x-\ln x>0$，因而 $a<\frac{\frac{1}{2}x^2-x}{x-\ln x}$.

设 $g(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2-x}{x-lnx}$，$x\in(e,+\infty)$，

因为 $g'(x)=\frac{(x-1)(x-\ln x)-(1-\frac{1}{x})(\frac{1}{2}x^2-x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{(x-1)(\frac{1}{2}x+1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}$，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$x-1>0$，令 $r(x)=\frac{1}{2}x+1-\ln x$，则 $r'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}(x>e)$.

$\therefore r'(x)>0$. $\therefore r(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调增，

$\therefore$ 对 $\forall x\in(e,+\infty)$，$r(x)>r(e)=\frac{e}{2}>0$.

所以 $g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $x\in(e,+\infty)$ 时为增函数，所以 $a\le g(e)=\frac{e^2-2e}{2(e-1)}$. ………12 分

19. 解：（Ⅰ）当 $n=2$ 时，$X=0,1,2$

$P(X=0)=\frac{C_2^0\cdot C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}$，$P(X=2)=\frac{C_2^0\cdot C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$. ………6 分

(Ⅱ) 一次参加比赛全是男生或全是女生的概率为 $p=\dfrac{C_2^2+C_n^2}{C_{n+2}^2}=\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}$.

$f(p)=C_3^1p(1-p)^2=3p^3-6p^2+3p$,

$f'(p)=9p^2-12p+3=3(p-1)(3p-1)$.

易知当 $p=\dfrac{1}{3}$ 时，$f(p)$ 取最大值，因此 $\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}=\dfrac{1}{3}$，解得 $n=2$. ………13 分

20. 解：(Ⅰ) 由 $\begin{cases}2c=4\\ \dfrac{c}{a}=2\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=1\\ c=2\end{cases}$，所以双曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. ………5 分

(Ⅱ) 双曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，$A(-1,0)$ $F(2,0)$.

设 $M\left(x_0,\ y_0\right),\left(x_0>0,\ y_0>0\right)$，则 $x_0{}^2-\dfrac{y_0{}^2}{3}=1$.

当 $MF\perp x$ 轴时，$x_0=2, y_0=3$，则 $k_{MF}=\dfrac{3}{3}=1$. 故 $\alpha_1=\dfrac{\pi}{4}$，$\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$.

$2\alpha_1+\alpha_2=\pi$;

当 $x_0\neq 2$ 时，$k_{MA}=\tan\alpha_1=\dfrac{y_0}{x_0+1}$，$k_{MF}=\tan\alpha_2=\dfrac{y_0}{x_0-2}$;

$$\tan 2\alpha_1=\frac{\dfrac{2y_0}{x_0+1}}{1-(\dfrac{y_0}{x_0+1})^2}=\frac{2(x_0+1)y_0}{(x_0+1)^2-y_0{}^2},$$

又 $y_0=3(x_0{}^2-1)$，$\therefore \tan 2\alpha_1=\dfrac{2(x_0+1)y_0}{(x_0+1)^2-y_0{}^2}=\dfrac{2(x_0+1)y_0}{(x_0+1)^2-3(x_0{}^2-1)}=-\dfrac{y_0}{x_0-2}$,

$\therefore \tan 2\alpha_1+\tan\alpha_2=0$，又 $\alpha_1\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\alpha_2\in(0,\pi)$，$\therefore 2\alpha_1+\alpha_2=\pi$. ………13 分

21. 解：(Ⅰ) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增，

则 $a_{n+1}>a_n$. $\therefore a_{n+1}-a_n=\dfrac{1+p}{1-p}a_n^2>0$，又 $a_1=1$，

$\therefore \dfrac{1+p}{1-p}>0$，$\therefore -1<p<1$.

若$-1<p<1$，则$\frac{1+p}{1-p}>0$.

$\because a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1+p}{1-p}a_n^2$，

$\therefore a_n>0(n\in N^*)$，

$a_{n+1}-a_n=\frac{1+p}{1-p}a_n^2>0$，

即 $a_{n+1}>a_n$，

$\therefore \{a_n\}$为单调增数列.

综上，数列$\{a_n\}$单调增数列的充要条件为$-1<p<1$. ………6 分

（Ⅱ）当$p=\frac{1}{3}$时，$\therefore a_{n+1}=a_n+2a_n^{\ 2}\ (n\in N^*)$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+2a_n$，

$b_n=\frac{1}{1+2a_n}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2a_n^2}{2a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{2a_na_{n+1}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}})$

$S_n=(\frac{1}{2a_1}-\frac{1}{2a_2})+(\frac{1}{2a_2}-\frac{1}{2a_3})+\cdots+(\frac{1}{2a_n}-\frac{1}{2a_{n+1}})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2a_{n+1}}$

由（Ⅰ）知$\{a_n\}$单调递增，$a_1=1\therefore a_{n+1}>0\therefore S_n<\frac{1}{2}$，

又$a_{n+1}-a_n=(a_n+2a_n^{\ 2})-(a_{n-1}+2a_{n-1}^2)=(a_n-a_{n-1})(1+2a_n+2a_{n-1})>5(a_n-a_{n-1})$，

$\therefore a_{n+1}-a_n>5^{n-1}(a_2-a_1)=2\times 5^{n-1}$ （$n\geqslant 2$）而 $a_2-a_1=2\times 5^0$，

$\therefore a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1>2\times 5^{n-1}+2\times 5^{n-2}+\cdots+2\times 5^0+1$

$=2\times\frac{1-5^n}{1-5}+1=\frac{5^n+1}{2}>\frac{1}{2}\times 5^n$，

$\therefore -\frac{1}{a_{n+1}}>-\frac{2}{5^n}$，

$\therefore S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2a_{n+1}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-\frac{2}{5^n})=\frac{1}{2}-\frac{1}{5^n}$，

综上所述，$\frac{1}{2}-\frac{1}{5^n}<S_n<\frac{1}{2}$. ………13 分