南京市、盐城市 2015 届高三年级第二次模拟考试

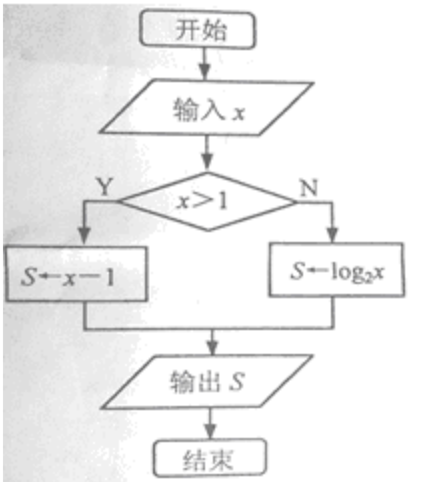
数　学

一、填空题

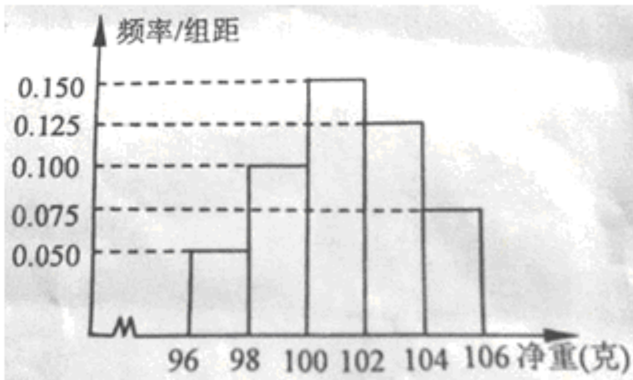
1、函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 的最小正周期为____________。

2、已知复数 $z=(2-i)(1+3i)$，其中 i 是虚数单位，则复数 z 在复平面上对应的点位于第 ______象限。

3、右图是一个算法流程图，如果输入 x 的值是 $\frac{1}{4}$，则输出 S 的值是__________。



(第 3 题图)

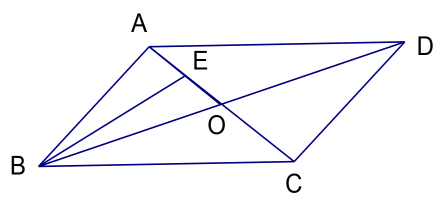


(第 4 题图)

4、某工厂为了了解一批产品的净重（单位：克）情况，从中随机抽测了 100 件产品的净重，所得数据均在区间[96，106]中，其中频率分布直方图如图所示，则在抽测的 100 件产品中，净重在区间[100，104]上的产品件数是__________。

若红球，得 2 分，摸出黑球，得 1 分，则 3 次摸球所得总分至少是 4 分的概率是______。

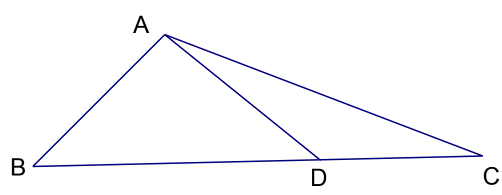
6、如图，在平面四边形 ABCD 中，AC,BD 相交于点 O，E 为线段 AO 的中点，若 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BD}$（$\lambda,\mu\in R$），则 $\lambda+\mu=$__________



第6题图

7、已知平面α，β，直线 m,n，给出下列命题：

①若 $m//\alpha$，$n//\beta,m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$，②若 $\alpha//\beta$，$m//\alpha,n//\beta$，则 $m||n$，③若 $m\perp\alpha,n\perp\beta,m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$，④若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha,n\perp\beta$，则 $m\perp n$.



第8题图

其中是真命题的是__________。（填写所有真命题的序号）。

8、如图，在ΔABC中，D是BC上的一点。已知$\angle B = 60^0$，$AD = 2, AC = \sqrt{10}, DC = \sqrt{2}$

则AB=________。

9、在平面直角坐标系xoy中，已知抛物线C：$x^2 = 4y$的焦点为F，定点$A(2\sqrt{2},0)$，若射线FA与抛物线C相交于点M，与抛物线C的准线相交于点N，则FM：MN=_________。

10、记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1 = 2$，且数列$\{\sqrt{S_n}\}$也为等差数列，

则a_{13}=____________。

11、已知知函数$f(x) = \dfrac{x+1}{|x|+1}$，$x \in R$，则不等式$f(x^2 - 2x) < f(3x - 4)$的解集是_____________。

12、在平面直角坐标系xoy中，已知⊙C：$x^2 + (y-1)^2 = 5$，A为⊙C与x负半轴的交点，过A作⊙C的弦AB，记线段AB的中点为M.则直线AB的斜率为___________。

13、已知α, β均为锐角，且$\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$，则$\tan\alpha$的最大值是____________。

14、已知函数$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, x \le 0 \\ f(x-1)+1, x > 0 \end{cases}$学优网$gkstk168$，当$x \in [0,100]$时，关于$x$的方程$f(x) = x - \dfrac{1}{5}$的所有解的和为_____________。

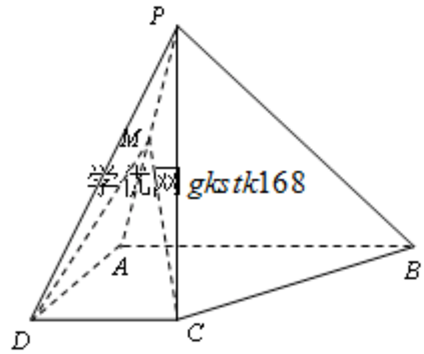
二、解答题

15、在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a, b, c.已知$\cos C = \dfrac{3}{5}$.

(1)若$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{9}{2}$,求$\Delta ABC$的面积；(2)设向量$\overrightarrow{X} = (2\sin\dfrac{B}{2}, \sqrt{3})$，$\vec{y} = (\cos B, \cos\dfrac{B}{2})$，且$\vec{x} \parallel \vec{y}$，求 $\sin(B - A)$的值。

16、如图，在四棱锥 P—ABCD 中，$AD = CD = \frac{1}{2}AB$，$AB \parallel DC$，$AD \perp CD$，$PC \perp$ 平面$ABCD$.

（1）求证：$BC \perp$平面PAC；（2）若 M 为线段 PA 的中点，且过C，D，M三点的平面与 PB 交于点 N，求 PN：PB 的值。



(第 16 题图)

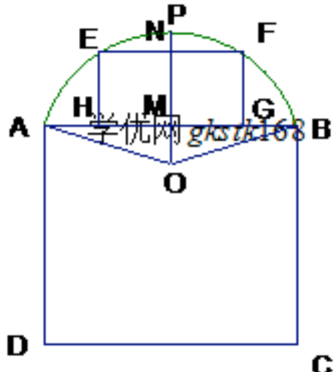
17．右图为某仓库一侧墙面的示意图，其下部是矩形 ABCD，上部是圆 AB，该圆弧所在的圆心为 O，为了调节仓库内的湿度和温度，现要在墙面上开一个矩形的通风窗 EFGH（其中 E，F 在圆弧 AB 上，G，H 在弦 AB 上）。过 O 作$OP \perp AB$，交 AB 于 M，交 EF 于 N，交圆弧 AB 于 P，已知$OP = 10, MP = 6.5$（单位：m）,记通风窗 EFGH 的面积为 S（单位：m^2）学优网gkstk168

（1）按下列要求建立函数关系式：

（i）设$\angle POF = \theta(rad)$，将 S 表示成θ的函数；

(ii)设$MN = x(m)$，将 S 表示成x的函数；

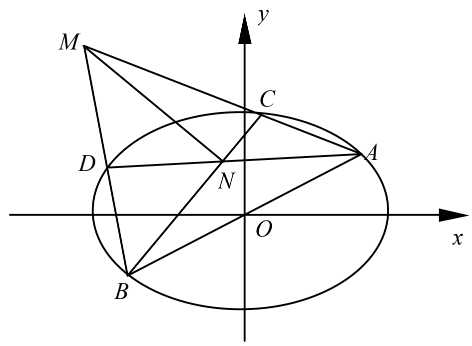
（2）试问通风窗的高度 MN 为多少时？通风窗 EFGH 的面积 S 最大？



第17题图

18、如图，在平面直角坐标系 xoy 中，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$学优网gkstk168 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l：$y=\frac{1}{2}x$ 与椭圆 E 相交于 A，B 两点，$AB=2\sqrt{5}$，C，D 是椭圆 E 上异于 A，B 两点，且直线 AC，BD 相交于点 M，直线 AD，BC 相交于点 N.

（1）求 a, b 的值；（2）求证：直线 MN 的斜率为定值。



(第 18 题图)

19、已知函数 $f(x)=1+\ln x-\frac{k(x-2)}{x}$学优网gkstk168，其中 k 为常数.

(1)若 $k=0$,求曲线 $y=f(x)$在点$(1, f(1))$处的切线方程.

(2)若 $k=5$,求证：$f(x)$有且仅有两个零点；

（3）若 k 为整数，且当 $x>2$ 时，$f(x)>0$恒成立，求 k 的最大值。

20．给定一个数列$\left\{a_n\right\}$，在这个数列里，任取$m\,(m\ge 3,\, m\in N^*)$项，并且不改变它们在数列$\left\{a_n\right\}$中的先后次序，得到的数列$\left\{a_n\right\}$的一个m阶子数列。

已知数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{n+a}$学优网$gkstk168\,(n\in N^*,\, a$为常数$)$，等差数列a_2，a_3，a_6是数列$\left\{a_n\right\}$的一个 3 子阶数列。

（1）　求a的值；

（2）　等差数列$b_1, b_2, \cdots, b_m$是$\left\{a_n\right\}$的一个$m\,(m\ge 3,\, m\in N^*)$阶子数列，且$b_1=\dfrac{1}{k}$

$(k$为常数，$k\in N^*,\, k\ge 2)$，求证：$m\le k+1$

（3）　等比数列$c_1, c_2, \cdots, c_m$是$\left\{a_n\right\}$的一个$m\,(m\ge 3,\, m\in N^*)$阶子数列，

求证：$c_1+c_1+\cdots+c_m\le 2-\dfrac{1}{2^{m-1}}$

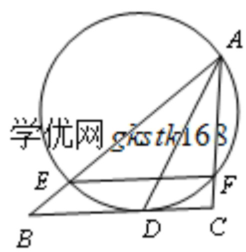
南京市、盐城市 2015 届高三年级第二次模拟考试

数学附加题

21、选做题

A，选修 4-1；几何证明选讲

如图，过点 A 的圆与 BC 切于点 D，且与 AB、AC 分别交于点 E、F.已知 AD 为∠BAC 的平分线，求证：EF||BC



（第 21A 题图）

B．选修 4-2：矩阵与变换

已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\2 & a\end{bmatrix}$，A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\b & 1\end{bmatrix}$

（1） 求 a, b 的值；（2）求 A 的特征值。

C．选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系xoy中，已知曲线C：$\begin{cases}x=s\\y=s^2\end{cases}$（$s$为参数），直线$l$：$\begin{cases}x=2+\frac{1}{\sqrt{10}}t\\y=4+\frac{3}{\sqrt{10}}t\end{cases}$（$t$为参数）.

设曲线 C 与直线 l 交于 A，B 两点，求线段 AB 的长度。

D．选修 4-5：不行等式选讲

已知 x, y, z 都是正数且 xyz=1, 求证：(1+x)(1+y)(1+z)≥8

22、甲、乙两支排球队进行比赛，约定先胜 3 局者获得比赛的胜利，比赛随即结束。除第五局甲队获胜的概率是$\frac{1}{2}$外，其余每局比赛甲队获胜的概率都是$\frac{2}{3}$.假设各局比赛结果相互独立.

(1)分别求甲队以 3：0，3：1，3：2 获胜的概率；

（2）若比赛结果为 3：0 或 3：1，则胜利方得 3 分、对方得 0 分；若比赛结果为 3:2，则胜利方得 2 分、对方得 1 分.求甲队得分 X 的分布列及数学期望。

23、（本小题满分 10 分）

已知$m, n \in N^*$，定义$f_n(m) = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$

（1）　记 $a_m = f_6(m)$，求$a_1 + a_2 + \cdots + a_{12}$的值；

（2）记 $b_m = (-1)^m m f_n(m)$，求$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$所有可能值的集合。

南京市、盐城市2015届高三年级第二次模拟考试

数学参考答案

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分．

1．π	2．一	3．-2	4．55	5．$\frac{7}{8}$
6．$\frac{3}{4}$	7．③④	8．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	9．$\frac{1}{3}$	10．50
11．(1，2)	12．　2	13．$\frac{\sqrt{2}}{4}$	14．10000	

15．（本小题满分 14 分）

在△*ABC* 中，角 *A*、*B*、*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*．已知 $\cos C=\dfrac{3}{5}$.

（1）若 $\overset{\circledR}{CB}\cdot\overset{\circledR}{CA}=\dfrac{9}{2}$，求△*ABC* 的面积；

（2）设向量 $\boldsymbol{x}=(2\sin\dfrac{B}{2}，\sqrt{3})$，$\boldsymbol{y}=(\cos B，\cos\dfrac{B}{2})$，且 $\boldsymbol{x}\parallel\boldsymbol{y}$，求 $\sin(B-A)$的值．

eq *o*(*CA*,*s**up*8(⟶))$=\dfrac{9}{2}$，得 $ab\cos C=\dfrac{9}{2}$.

又因为 $\cos C=\dfrac{3}{5}$，所以 $ab=\dfrac{9}{2\cos C}=\dfrac{15}{2}$.　　…………………… 2 分

又 *C* 为△*ABC* 的内角，所以 $\sin C=\dfrac{4}{5}$.　　…………………… 4 分

所以△*ABC* 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=3$.　　…………………… 6 分

（2）因为 $\boldsymbol{x}//\boldsymbol{y}$，所以 $2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{3}\cos B$，即 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$.　　………………… 8 分

因为 $\cos B\neq 0$，所以 $\tan B=\sqrt{3}$.

因为 *B* 为三角形的内角，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.　　………………… 10 分

所以 $A+C=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}-C$.

所以 $\sin(B-A)=\sin(\dfrac{\pi}{3}-A)=\sin(C-\dfrac{\pi}{3})$

$$=\frac{1}{2}\sin C-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}$$

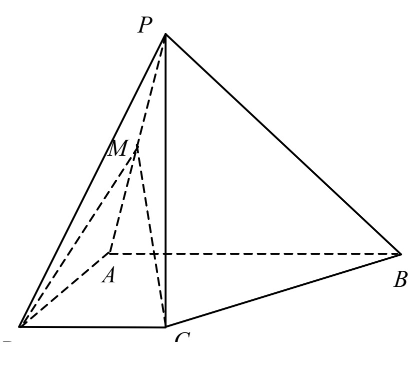
$$=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}.$$　　………………… 14 分

16．（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 *P*—*ABCD* 中，$AD=CD=\dfrac{1}{2}AB$，$AB\parallel DC$，$AD\perp CD$，$PC\perp$平面 *ABCD*.

（1）求证：$BC\perp$平面 *PAC*；

（2）若 *M* 为线段 *PA* 的中点，且过 *C*，*D*，*M* 三点的平面与 *PB* 交于点 *N*，求 *PN*：*PB* 的值．



证明：（1）连结 *AC*．不妨设 *AD*＝1．

因为 $AD=CD=\frac{1}{2}AB$，所以 $CD=1$，$AB=2$．

因为 $\angle ADC=90°$，所以 $AC=\sqrt{2}$，$\angle CAB=45°$．

在△ABC 中，由余弦定理得 $BC=\sqrt{2}$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$．

所以 $BC\perp AC$．　……………………　3 分

因为 $PC\perp$平面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，所以 $BC\perp PC$．　……………………　5 分

因为 $PC\subset$平面 PAC，$AC\subset$平面 PAC，$PC\cap AC=C$，

所以 $BC\perp$平面 PAC．　……………………　7 分

（2）如图，因为 $AB\parallel DC$，$CD\subset$平面 $CDMN$，$AB\not\subset$平面 $CDMN$，

所以 $AB\parallel$平面 $CDMN$．　……………………　9 分

因为 $AB\subset$平面 PAB，

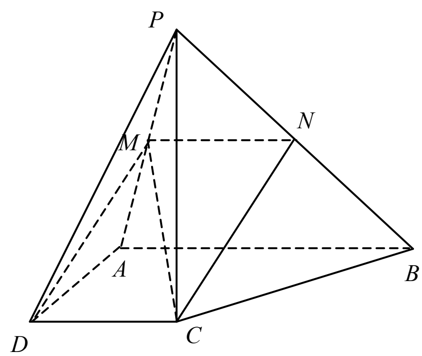
平面 $PAB\cap$平面 $CDMN=MN$，

所以 $AB\parallel MN$．　……………………　12 分

在△PAB 中，因为 M 为线段 PA 的中点，

所以 N 为线段 PB 的中点，

即 PN：PB 的值为$\frac{1}{2}$．　……………………　14 分



(第 16 题图)

17．（本小题满分 14 分）

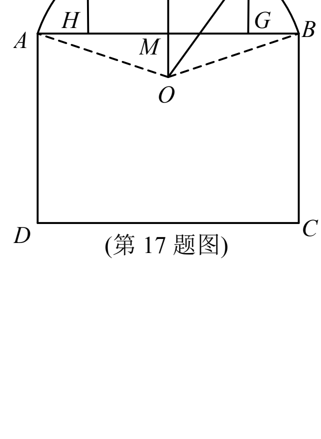
右图为某仓库一侧墙面的示意图，其下部是一个矩形 $ABCD$，上部是圆弧 AB，该圆弧所在圆的圆心为 O．为了调节仓库内的湿度和温度，现要在墙面上开一个矩形的通风窗 $EFGH$(其中 E，F 在圆弧 AB 上，　G，H 在弦 AB 上)．过 O 作 $OP\perp AB$，交 AB 于 M，交 EF 于 N，交圆弧 AB 于 P．已知 $OP=10$，$MP=6.5$（单位：m），记通风窗 $EFGH$ 的面积为 S（单位：m^2）．

（1）按下列要求建立函数关系式：

(i)设$\angle POF=\theta$ (rad)，将 S 表示成 θ 的函数；

(ii)设 $MN=x$ (m)，将 S 表示成 x 的函数；

（2）试问通风窗的高度 MN 为多少时，通风窗 $EFGH$ 的面积 S 最大？



(第 17 题图)

解：（1）由题意知，$OF=OP=10$，$MP=6.5$，故 $OM=3.5$．

(i)在 Rt△ONF 中，$NF=OF\sin\theta=10\sin\theta$，$ON=OF\cos\theta=10\cos\theta$．

在矩形 $EFGH$ 中，$EF=2MF=20\sin\theta$，$FG=ON-OM=10\cos\theta-3.5$，

故 $S=EF\times FG=20\sin\theta(10\cos\theta-3.5)=10\sin\theta(20\cos\theta-7)$.

即所求函数关系是 $S=10\sin\theta(20\cos\theta-7)$，$0<\theta<\theta_0$，其中 $\cos\theta_0=\dfrac{7}{20}$.

………… 4 分

(ii)因为 $MN=x$，$OM=3.5$，所以 $ON=x+3.5$.

在 Rt△ONF 中，$NF=\sqrt{OF^2-ON^2}=\sqrt{100-(x+3.5)^2}=\sqrt{\dfrac{351}{4}-7x-x^2}$.

在矩形 $EFGH$ 中，$EF=2NF=\sqrt{351-28x-4x^2}$，$FG=MN=x$，

故 $S=EF\times FG=x\sqrt{351-28x-4x^2}$.

即所求函数关系是 $S=x\sqrt{351-28x-4x^2}$，$0<x<6.5$.　　………… 8 分

（2）**方法一**：选择(i)中的函数模型：

令 $f(\theta)=\sin\theta(20\cos\theta-7)$，

则 $f'(\theta)=\cos\theta(20\cos\theta-7)+\sin\theta(-20\sin\theta)=40\cos^2\theta-7\cos\theta-20$. ………… 10 分

由 $f'(\theta)=40\cos^2\theta-7\cos\theta-20=0$，解得 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，或 $\cos\theta=-\dfrac{5}{8}$.

因为 $0<\theta<\theta_0$，所以 $\cos\theta>\cos\theta_0$，所以 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$.

设 $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，且 α 为锐角，

则当 $\theta\in(0，\alpha)$时，$f'(\theta)>0$ ，$f(\theta)$是增函数；当 $\theta\in(\alpha，\theta_0)$时，$f'(\theta)<0$ ，$f(\theta)$是减函数，

所以当 $\theta=\alpha$，即 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$时，$f(\theta)$取到最大值，此时 S 有最大值.

即 $MN=10\cos\theta-3.5=4.5$m 时，通风窗的面积最大.　　………… 14 分

方法二：选择(ii)中的函数模型：

因为 $S=\sqrt{x^2(351-28x-4x^2)}$ ，令 $f(x)=x^2(351-28x-4x^2)$，

则 $f'(x)=-2x(2x-9)(4x+39)$.　　……… 10 分

因为当 $0<x<\dfrac{9}{2}$时 ，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$\dfrac{9}{2}<x<\dfrac{13}{2}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

所以当 $x=\dfrac{9}{2}$时，$f(x)$取到最大值，此时 S 有最大值.

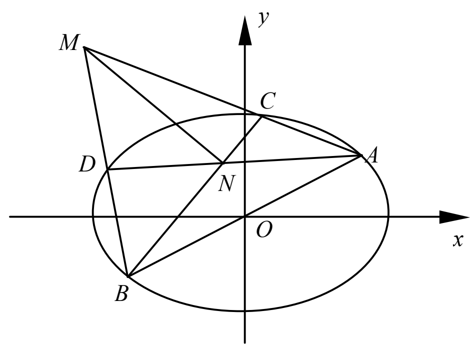
即 $MN=x=4.5$m 时，通风窗的面积最大.　　………… 14 分

18．（本小题满分 16 分）

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，直线 l：$y=\frac{1}{2}x$ 与椭圆 E 相交于 A，B 两点，$AB=2\sqrt{5}$．C，D 是椭圆 E 上异于 A，B 的任意两点，且直线 AC，BD 相交于点 M，直线 AD，BC 相交于点 N．

（1）求 a，b 的值；

（2）求证：直线 MN 的斜率为定值．



(第 18 题图)

解：（1）因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c^2=\frac{1}{2}a^2$，即 $a^2-b^2=\frac{1}{2}a^2$，所以 $a^2=2b^2$．…… 2 分

故椭圆方程为$\frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$．

由题意，不妨设点 A 在第一象限，点 B 在第三象限．

由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x, \\ \frac{x^2}{2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \end{cases}$ 解得 $A(\frac{2\sqrt{3}}{3}b，\frac{\sqrt{3}}{3}b)$．

又 $AB=2\sqrt{5}$，所以 $OA=\sqrt{5}$，即$\frac{4}{3}b^2+\frac{1}{3}b^2=5$，解得 $b^2=3$．

故 $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}$．　　……………… 5 分

（2）**方法一**：由（1）知，椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，从而 $A(2，1)$，$B(-2，-1)$．

①当 CA，CB，DA，DB 斜率都存在时，设直线 CA，DA 的斜率分别为 k_1，k_2，$C(x_0，y_0)$，显然 $k_1\neq k_2$．

从而 $k_1\cdot k_{CB}=\frac{y_0-1}{x_0-2}\cdot\frac{y_0+1}{x_0+2}=\frac{{y_0}^2-1}{{x_0}^2-4}=\frac{3(1-\frac{{x_0}^2}{6})-1}{{x_0}^2-4}=\frac{2-\frac{{x_0}^2}{2}}{{x_0}^2-4}=-\frac{1}{2}$．

所以 $k_{CB}=-\frac{1}{2k_1}$．　　…………………… 8 分

同理 $k_{DB}=-\frac{1}{2k_2}$．

于是直线 AD 的方程为 $y-1=k_2(x-2)$，直线 BC 的方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2k_1}(x+2)$.

由 $\begin{cases}y+1=-\dfrac{1}{2k_1}(x+2),\\ y-1=k_2(x-2),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4k_1k_2-4k_1-2}{2k_1k_2+1},\\ y=\dfrac{-2k_1k_2-4k_2+1}{2k_1k_2+1}.\end{cases}$

从而点 N 的坐标为 $(\dfrac{4k_1k_2-4k_1-2}{2k_1k_2+1}，\dfrac{-2k_1k_2-4k_2+1}{2k_1k_2+1})$.

用 k_2 代 k_1，k_1 代 k_2 得点 M 的坐标为 $(\dfrac{4k_1k_2-4k_2-2}{2k_1k_2+1}，\dfrac{-2k_1k_2-4k_1+1}{2k_1k_2+1})$.

………… 11 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{\dfrac{-2k_1k_2-4k_2+1}{2k_1k_2+1}-\dfrac{-2k_1k_2-4k_1+1}{2k_1k_2+1}}{\dfrac{4k_1k_2-4k_1-2}{2k_1k_2+1}-\dfrac{4k_1k_2-4k_2-2}{2k_1k_2+1}}=\dfrac{4(k_1-k_2)}{4(k_2-k_1)}=-1$.

即直线 MN 的斜率为定值 -1.　　　……… 14 分

②当 CA，CB，DA，DB 中，有直线的斜率不存在时，

根据题设要求，至多有一条直线斜率不存在，

故不妨设直线 CA 的斜率不存在，从而 $C(2，-1)$.

仍然设 DA 的斜率为 k_2，由①知 $k_{DB}=-\dfrac{1}{2k_2}$.

此时 CA：$x=2$，DB：$y+1=-\dfrac{1}{2k_2}(x+2)$，它们交点 $M(2，-1-\dfrac{2}{k_2})$.

BC：$y=-1$，AD：$y-1=k_2(x-2)$，它们交点 $N(2-\dfrac{2}{k_2}，-1)$，

从而 $k_{MN}=-1$ 也成立.

由①②可知，直线 MN 的斜率为定值 -1.　　………… 16 分

方法二：由（1）知，椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，从而 $A(2，1)$，$B(-2，-1)$.

①当 CA，CB，DA，DB 斜率都存在时，设直线 CA，DA 的斜率分别为 k_1，k_2.

显然 $k_1\neq k_2$.

直线 AC 的方程 $y-1=k_1(x-2)$，即 $y=k_1x+(1-2k_1)$.

由 $\begin{cases}y=k_1x+(1-2k_1),\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(1+2k_1^2)x^2+4k_1(1-2k_1)x+2(4k_1^2-4k_1-2)=0$.

设点 C 的坐标为 $(x_1，y_1)$，则 $2\cdot x_1=\dfrac{2(4k_1^2-4k_1-2)}{1+2k_1^2}$，从而 $x_1=\dfrac{4k_1^2-4k_1-2}{2k_1^2+1}$.

所以 $C(\frac{4k_1^2-4k_1-2}{2k_1^2+1}，\frac{-2k_1^2-4k_1+1}{2k_1^2+1})$.

又 $B(-2，-1)$，

所以 $k_{BC}=\dfrac{\frac{-2k_1^2-4k_1+1}{2k_1^2+1}+1}{\frac{4k_1^2-4k_1-2}{2k_1^2+1}+2}=-\dfrac{1}{2k_1}$.　　………………… 8 分

所以直线 BC 的方程为 $y+1=-\dfrac{1}{2k_1}(x+2)$.

又直线 AD 的方程为 $y-1=k_2(x-2)$.

由 $\begin{cases}y+1=-\dfrac{1}{2k_1}(x+2)，\\ y-1=k_2(x-2)，\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4k_1k_2-4k_1-2}{2k_1k_2+1}，\\ y=\dfrac{-2k_1k_2-4k_2+1}{2k_1k_2+1}.\end{cases}$

从而点 N 的坐标为 $(\frac{4k_1k_2-4k_1-2}{2k_1k_2+1}，\frac{-2k_1k_2-4k_2+1}{2k_1k_2+1})$.

用 k_2 代 k_1，k_1 代 k_2 得点 M 的坐标为 $(\frac{4k_1k_2-4k_2-2}{2k_1k_2+1}，\frac{-2k_1k_2-4k_1+1}{2k_1k_2+1})$.

……… 11 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{\frac{-2k_1k_2-4k_2+1}{2k_1k_2+1}-\frac{-2k_1k_2-4k_1+1}{2k_1k_2+1}}{\frac{4k_1k_2-4k_1-2}{2k_1k_2+1}-\frac{4k_1k_2-4k_2-2}{2k_1k_2+1}}=\dfrac{4(k_1-k_2)}{4(k_2-k_1)}=-1$.

即直线 MN 的斜率为定值 -1.　………………… 14 分

②当 CA，CB，DA，DB 中，有直线的斜率不存在时，

根据题设要求，至多有一条直线斜率不存在，

故不妨设直线 CA 的斜率不存在，从而 $C(2，-1)$.

仍然设 DA 的斜率为 k_2，则由①知 $k_{DB}=-\dfrac{1}{2k_2}$.

此时 CA：$x=2$，DB：$y+1=-\dfrac{1}{2k_2}(x+2)$，它们交点 $M(2，-1-\dfrac{2}{k_2})$.

BC：$y=-1$，AD：$y-1=k_2(x-2)$，它们交点 $N(2-\dfrac{2}{k_2}，-1)$，

从而 $k_{MN}=-1$ 也成立.

由①②可知，直线 MN 的斜率为定值 -1.　………………… 16 分

19．（本小题满分 16 分）

已知函数$f(x)=1+\ln x-\dfrac{k(x-2)}{x}$，其中$k$为常数．

（1）若$k=0$，求曲线$y=f(x)$在点 $(1，f(1))$处的切线方程；

（2）若$k=5$，求证：$f(x)$有且仅有两个零点；

（3）若k为整数，且当$x>2$时，$f(x)>0$恒成立，求k的最大值．

（参考数据 ln8＝2.08，ln9＝2.20，ln10＝2.30）

解：（1）当$k=0$时，$f(x)=1+\ln x$．

因为$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，从而$f'(1)=1$．

又$f(1)=1$，

所以曲线$y=f(x)$在点 $(1，f(1))$处的切线方程$y-1=x-1$，

即$x-y=0$．　　　　　　　　　　………　3 分

（2）当$k=5$时，$f(x)=\ln x+\dfrac{10}{x}-4$．

因为$f'(x)=\dfrac{x-10}{x^2}$，从而

当$x\in(0，10)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x\in(10，+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增．

所以当$x=10$时，$f(x)$有极小值．　　　………………　5 分

因$f(10)=\ln 10-3<0$，$f(1)=6>0$，所以$f(x)$在$(1，10)$之间有一个零点．

因为$f(e^4)=4+\dfrac{10}{e^4}-4>0$，所以$f(x)$在$(10，e^4)$之间有一个零点．

从而$f(x)$有两个不同的零点．　　　……………　8 分

（3）**方法一**：由题意知，$1+\ln x-\dfrac{k(x-2)}{x}>0$对$x\in(2，+\infty)$恒成立，

即$k<\dfrac{x+x\ln x}{x-2}$对$x\in(2，+\infty)$恒成立．

令$h(x)=\dfrac{x+x\ln x}{x-2}$，则$h'(x)=\dfrac{x-2\ln x-4}{(x-2)^2}$．

设$v(x)=x-2\ln x-4$，则$v'(x)=\dfrac{x-2}{x}$．

当$x\in(2，+\infty)$时，$v'(x)>0$，所以$v(x)$在$(2，+\infty)$为增函数．

因为$v(8)=8-2\ln 8-4=4-2\ln 8<0$，$v(9)=5-2\ln 9>0$，

所以存在$x_0\in(8，9)$，$v(x_0)=0$，即$x_0-2\ln x_0-4=0$．

当$x\in(2，x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，当$x\in(x_0，+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增．

所以当 $x=x_0$ 时，$h(x)$的最小值 $h(x_0)=\dfrac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-2}$.

因为 $\ln x_0=\dfrac{x_0-4}{2}$，所以 $h(x_0)=\dfrac{x_0}{2}\in(4，4.5)$.

故所求的整数 k 的最大值为 4．　……………16 分

方法二：由题意知，$1+\ln x-\dfrac{k(x-2)}{x}>0$ 对 $x\in(2，+\infty)$恒成立.

$f(x)=1+\ln x-\dfrac{k(x-2)}{x}$，$f'(x)=\dfrac{x-2k}{x^2}$.

①当 $2k\leqslant 2$，即 $k\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$ 对 $x\in(2，+\infty)$恒成立，

所以 $f(x)$在$(2，+\infty)$上单调递增.

而 $f(2)=1+\ln 2>0$ 成立，所以满足要求.

②当 $2k>2$，即 $k>1$ 时，

当 $x\in(2，2k)$时，$f'(x)<0$， $f(x)$单调递减，当 $x\in(2k，+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

所以当 $x=2k$ 时，$f(x)$有最小值 $f(2k)=2+\ln 2k-k$.

从而 $f(x)>0$ 在 $x\in(2，+\infty)$恒成立，等价于 $2+\ln 2k-k>0$.

令 $g(k)=2+\ln 2k-k$，则 $g'(k)=\dfrac{1-k}{k}<0$，从而 $g(k)$ 在$(1，+\infty)$为减函数．

因为 $g(4)=\ln 8-2>0$，$g(5)=\ln 10-3<0$ ，

所以使 $2+\ln 2k-k<0$ 成立的最大正整数 $k=4$．

综合①②，知所求的整数 k 的最大值为 4．　……… 16 分

20．（本小题满分 16 分）

给定一个数列$\{a_n\}$，在这个数列里，任取 $m(m\geqslant 3，m\in\mathbf{N}^*)$项，并且不改变它们在数列$\{a_n\}$中的先后次序，得到的数列称为数列$\{a_n\}$的一个 m 阶子数列.

已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n+a}$ ($n\in\mathbf{N}^*$，a 为常数)，等差数列 a_2，a_3，a_6 是数列$\{a_n\}$的一个 3 阶子数列.

（1）求 a 的值；

（2）等差数列 b_1，b_2，…，b_m 是$\{a_n\}$的一个 m ($m\geqslant 3$，$m\in\mathbf{N}^*$) 阶子数列，且 $b_1=\dfrac{1}{k}$ (k 为常数，$k\in\mathbf{N}^*$，$k\geqslant 2$)，求证：$m\leqslant k+1$；

（3）等比数列 c_1，c_2，…，c_m 是 $\{a_n\}$ 的一个 m ($m\geqslant 3$，$m\in\mathbf{N}^*$) 阶子数列，

求证：$c_1+c_2+\cdots+c_m\leqslant 2-\frac{1}{2^{m-1}}$.

解：(1) 因为 a_2，a_3，a_6 成等差数列，所以 $a_2-a_3=a_3-a_6$.

又因为 $a_2=\frac{1}{2+a}$，$a_3=\frac{1}{3+a}$，　$a_6=\frac{1}{6+a}$，

代入得 $\frac{1}{2+a}-\frac{1}{3+a}=\frac{1}{3+a}-\frac{1}{6+a}$，解得 $a=0$.　　…………… 3 分

（2）设等差数列 b_1，b_2，…，b_m 的公差为 d.

因为 $b_1=\frac{1}{k}$，所以 $b_2\leqslant\frac{1}{k+1}$，

从而 $d=b_2-b_1\leqslant\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}=-\frac{1}{k(k+1)}$.　　……………… 6 分

所以 $b_m=b_1+(m-1)d\leqslant\frac{1}{k}-\frac{m-1}{k(k+1)}$.

又因为 $b_m>0$，所以 $\frac{1}{k}-\frac{m-1}{k(k+1)}>0$.

即 $m-1<k+1$.

所以 $m<k+2$.

又因为 m，$k\in\mathbf{N}^*$，所以 $m\leqslant k+1$.　　…………… 9 分

（3）设 $c_1=\frac{1}{t}$ ($t\in\mathbf{N}^*$)，等比数列 c_1，c_2，…，c_m 的公比为 q.

因为 $c_2\leqslant\frac{1}{t+1}$，所以 $q=\frac{c_2}{c_1}\leqslant\frac{t}{t+1}$.

从而 $c_n=c_1q^{n-1}\leqslant\frac{1}{t}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{n-1}$（$1\leqslant n\leqslant m$，$n\in\mathbf{N}^*$）.

$$\begin{aligned}\text{所以 } c_1+c_2+\cdots+c_m&\leqslant\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{1}+\frac{1}{t}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{2}+\cdots+\frac{1}{t}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{m-1}\\&=\frac{t+1}{t}\left[1-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{m}\right]\\&=\frac{t+1}{t}-\left(\frac{t}{t+1}\right)^{m-1}.\end{aligned}$$

…………… 13 分

设函数 $f(x)=x-\frac{1}{x^{m-1}}$，（$m\geqslant 3$，$m\in\mathbf{N}^*$）.

当 $x\in(0，+\infty)$时，函数 $f(x)=x-\frac{1}{x^{m-1}}$ 为单调增函数.

因为当 $t\in\mathbf{N}^*$，所以 $1<\frac{t+1}{t}\leqslant 2$.　　所以 $f(\frac{t+1}{t})\leqslant 2-\frac{1}{2^{m-1}}$.

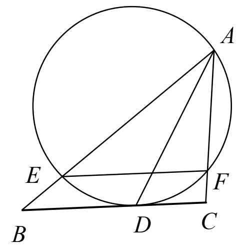
即 $c_1+c_2+\cdots+c_m\leqslant 2-\dfrac{1}{2^{m-1}}$.　　……… 16 分

南京市、盐城市 2015 届高三年级第二次模拟考试

数学附加题参考答案

A．选修 4—1：几何证明选讲

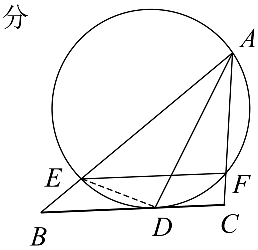
如图，过点 A 的圆与 BC 切于点 D，且与 AB、AC 分别交于点 E、F．已知 AD 为$\angle BAC$ 的平分线，求证：$EF\parallel BC$．



（第 21A 题图）

证明：如图，连接 ED．

因为圆与 BC 切于 D，所以$\angle BDE=\angle BAD$．…………………… 4 分



（第 21A 题图）

因为 AD 平分$\angle BAC$，

所以$\angle BAD=\angle DAC$．

又$\angle DAC=\angle DEF$，所以$\angle BDE=\angle DEF$．

所以 $EF\parallel BC$．　…………………… 10 分

B．选修 4－2：矩阵与变换

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0\\2&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\b&1\end{bmatrix}$．

（1）求 a，b 的值；

（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

解：（1）因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&0\\2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\b&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\frac{2}{3}+ab&a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

所以 $\begin{cases}a=1,\\\dfrac{2}{3}+ab=0.\end{cases}$

解得 $a=1$，$b=-\dfrac{2}{3}$.　…………………… 5 分

（2）由（1）得 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$.　　………………… 10 分

C．选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 C：$\begin{cases} x=s, \\ y=s^2 \end{cases}$ (s 为参数)，直线 l：$\begin{cases} x=2+\dfrac{1}{\sqrt{10}}t, \\ y=4+\dfrac{3}{\sqrt{10}}t \end{cases}$ （t 为参数）. 设 C 与 l 交于 A，B 两点，求线段 AB 的长度.

解： 由$\begin{cases} x=s, \\ y=s^2 \end{cases}$ 消去 s 得曲线 C 的普通方程为 $y=x^2$；

由$\begin{cases} x=2+\dfrac{1}{\sqrt{10}}t, \\ y=4+\dfrac{3}{\sqrt{10}}t \end{cases}$ 消去 t 得直线 l 的普通方程为 $y=3x-2$. …………… 5 分

联立直线方程与曲线 C 的方程，即$\begin{cases} y=x^2, \\ y=3x-2, \end{cases}$

解得交点的坐标分别为(1，1)，(2，4).

所以线段 AB 的长度为$\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$.　　…………… 10 分

D．选修 4－5：不等式选讲

已知 x，y，z 都是正数，且 $xyz=1$，求证：$(1+x)(1+y)(1+z)\geqslant 8$.

证明： 因为 x 为正数，所以 $1+x\geqslant 2\sqrt{x}$.

同理 $1+y\geqslant 2\sqrt{y}$，

$1+z\geqslant 2\sqrt{z}$.

所以$(1+x)(1+y)(1+z)\geqslant 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{z}=8\sqrt{xyz}$.

因为 $xyz=1$，　　所以$(1+x)(1+y)(1+z)\geqslant 8$.　　　　…… 10 分

22．（**本小题满分 10 分**）

甲、乙两支排球队进行比赛，约定先胜 3 局者获得比赛的胜利，比赛随即结束．除第五局甲队获胜的概率是$\dfrac{1}{2}$外，其余每局比赛甲队获胜的概率都是$\dfrac{2}{3}$．假设各局比赛结果相互独立．

（1）分别求甲队以 3∶0，3∶1，3∶2 获胜的概率；

（2）若比赛结果为 3∶0 或 3∶1，则胜利方得 3 分、对方得 0 分；若比赛结果为 3∶2，则胜利方得 2 分、对方得 1 分．求甲队得分 X 的分布列及数学期望．

解：（1）记甲队以 3∶0，3∶1，3∶2 获胜分别为事件 A，B，C．

由题意得 $P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

$P(B)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，

$P(C)=\ C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{27}$．　　…………… 5 分

（2）X 的可能取值为 0，1，2，3．

$P(X=3)=P(A)+P(B)=\frac{16}{27}$；　$P(X=2)=P(C)=\frac{4}{27}$，

$P(X=1)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{27}$，　$P(X=0)=1-P(1\leqslant X\leqslant 3)=\frac{1}{9}$．

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{27}$

从而 $E(X)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{16}{27}=\frac{20}{9}$．

答：甲队以 3∶0，3∶1，3∶2 获胜的概率分别为$\frac{8}{27}$，$\frac{8}{27}$，$\frac{4}{27}$．甲队得分 X 的数学期望为 $\frac{20}{9}$．　　…………………… 10 分

23．**（本小题满分 10 分）**

已知 m，$n\in\mathbf{N}^*$，定义 $f_n(m)=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$．

（1）记 $a_m=f_6(m)$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_{12}$ 的值；

（2）记 $b_m=(-1)^m mf_n(m)$，求 $b_1+b_2+\cdots+b_{2n}$ 所有可能值的集合．

解：（1）由题意知，$f_n(m)=\begin{cases}0，m\geqslant n+1，\\ C_n^m，1\leqslant m\leqslant n.\end{cases}$

所以 $a_m=\begin{cases}0，m\geqslant 7，\\ C_6^m，1\leqslant m\leqslant 6.\end{cases}$　　………………… 2 分

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{12}=C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6=63$．　　………………… 4 分

（2）当 $n=1$ 时，$b_m=(-1)^m mf_1(m)=\begin{cases}0, & m\geqslant 2,\\ -1, & m=1.\end{cases}$ 则 $b_1+b_2=-1$．………… 6 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_m=\begin{cases}0, & m\geqslant n+1,\\ (-1)^m m\cdot C_n^m, & 1\leqslant m\leqslant n.\end{cases}$

又 $mC_n^m=m\cdot\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}=nC_{n-1}^{m-1}$，

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=n[-C_{n-1}^0+C_{n-1}^1-C_{n-1}^2+C_{n-1}^3+\cdots+(-1)^n C_{n-1}^{n-1}]=0$．

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{2n}$ 的取值构成的集合为 $\{-1，0\}$．　　………… 10 分